宇宙学

第 2 讲　用 FLRW 度规描述膨胀的宇宙

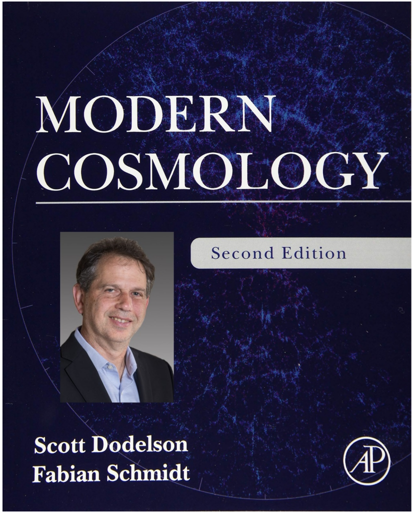
Cheng-Zong Ruan

cheng-zong.ruan@durham.ac.uk

ICC, Durham

last update: January 5, 2022

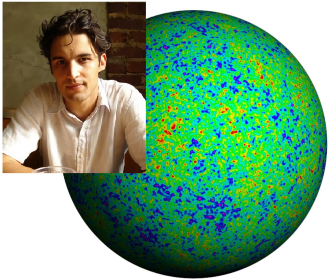
- 教材：*Modern Cosmology*, Scott Dodelson and Fabian Schmidt
- 参考资料：*Cosmology* (online lecture notes), Daniel Baumann



Cosmology

Daniel Baumann

Institute of Theoretical Physics, University of Amsterdam,
Science Park, 1090 GL Amsterdam, The Netherlands

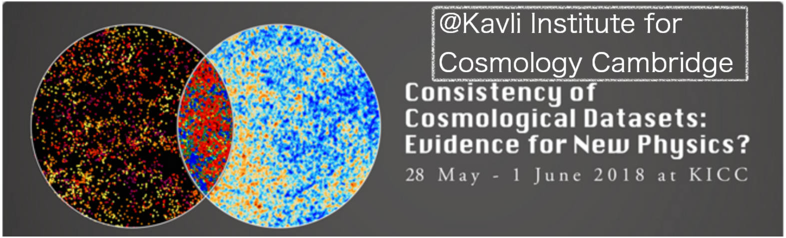


课程内容

- **均匀各向同性宇宙的几何、运动学、动力学与平衡态热力学（第 1-2 章）**
- 超越平衡态：以氢原子复合、暗物质遗迹与大爆炸核合成的原初氦丰度为例（第 3 章）
- **玻尔兹曼方程：宇宙成分（背景 + 扰动）的演化（第 4 章）**
- **爱因斯坦方程：时空（背景 + 扰动）的演化（第 5 章）**
- 暴胀机制，演化方程初始条件及其产生（第 6 章）
- **物质（以冷暗物质为主）扰动的解（第 7 章）**
- 辐射（宇宙微波背景, CMB）各向异性的解（第 8 章）
- 宇宙学观测：星系巡天、弱引力透镜与 CMB 极化等（第 9-10 章）
- 宇宙学数据分析：以 CMB 与星系巡天为例（第 11 章）

课程内容

Consistency of Cosmological Datasets: Evidence for new Physics?
28 May 2018 - 1 June 2018



9.15-10.00 George Efstathiou Why are we here?
10.00-10.45 Adam Riess Direct Measurements of H0 — H0 tension

10-45-11.15 Coffee break

11.15-12.00 Silvia Galli Cosmology from the CMB
12.00-12.45 Daniel Eisenstein LSS/BAO — CMB/LSS/BAO **chapter7/8/9**

12.45-2pm Lunch in the KICC for registered participants

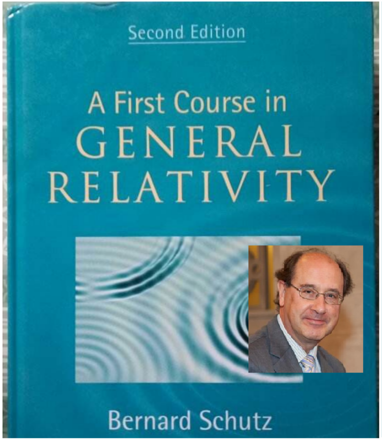
2.00-2.45 Catherine Heymans Weak lensing — weak lensing **chapter 10**
2.45-3.30 Ryan Cooke BBN — BBN **chapter 3**

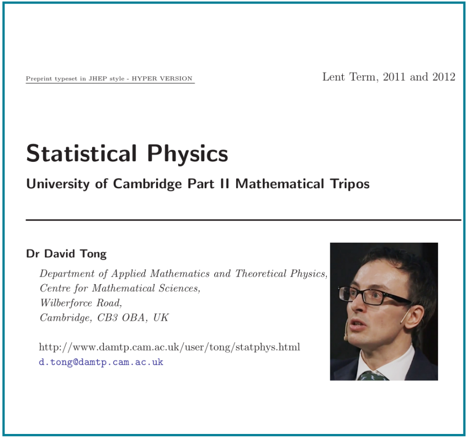
3.30-4.00 Coffee break

4.00-4.45 Anastasia Fialkov 21cm absorption at high redshift. — 21cm line **天体物理辐射机制**
4.45-5.30 Boris Leistedt Statistical analysis of cosmological datasets

课程内容

- 面向宇宙学专业的研究生
- 先修课：广义相对论，热力学与统计力学





Preprint typeset in JHEP style - HYPER VERSION

Lent Term, 2011 and 2012

Statistical Physics

University of Cambridge Part II Mathematical Tripos

Dr David Tong

Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics,
Centre for Mathematical Sciences,
Wilberforce Road,
Cambridge, CB3 OBA, UK

http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/statphys.html
d.tong@damtp.cam.ac.uk

膨胀的均匀宇宙模型：FLRW 度规

- 宇宙学原理 (cosmological principle)：宇宙在大尺度是均匀各向同性的
- 根据黎曼几何，描述这一时空的度规是 Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) 度规：（推导参见任何一本广义相对论教材的宇宙学部分）

$$\boxed{ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)\right],}$$

FLRW 宇宙的对称性将度规的十个独立分量约化为一个时间的函数——**尺度因子 (scale factor)** $a(t)$，与一个常数——**空间曲率参数** k.

FLRW 宇宙的几何性质——常用物理量

- 径向坐标 r 称为**共动 (comoving) 坐标**
- 相应的物理距离 $r_{\text{phys}} = a(t)r$，物理速度

$$v_{\text{phys}} \equiv \frac{\mathrm{d}r_{\text{phys}}}{\mathrm{d}t} = a(t)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}r = v_{\text{pec}} + Hr_{\text{phys}} \ ,$$

  其中定义了**本动速度 (peculiar velocity)** $v_{\text{pec}} \equiv a(t)\dot{r}$
- 真实的物理速度是本动速度与**哈勃速度（哈勃流, Hubble flow）** Hr_{phys} 之和，其中定义了**哈勃参量**为

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \quad \left(\dot{} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) .$$

FLRW 宇宙的几何性质——常用物理量

- 有时重新定义径向坐标 χ： $\mathrm{d}\chi \equiv \mathrm{d}r/\sqrt{1-kr^2}, \chi(r=0)=0$, 从而 FLRW 线元化为

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\left[\mathrm{d}\chi^2 + S_k^2(\chi)\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right)\right],$$

其中

$$S_k(\chi) \equiv \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}}\sinh\left(\sqrt{k}\chi\right) & k<0 \\ \chi & k=0 \\ \frac{1}{\sqrt{k}}\sin\left(\sqrt{k}\chi\right) & k>0 \end{cases}$$

FLRW 宇宙的几何性质——常用物理量

- 定义**共形时间 (conformal time)** η： $d\eta = dt/a(t)$， FLRW 线元化为

$$ds^2 = a^2(\eta)\Big\{-d\eta^2 + \big[d\chi^2 + S_k^2(\chi)\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\big]\Big\}$$

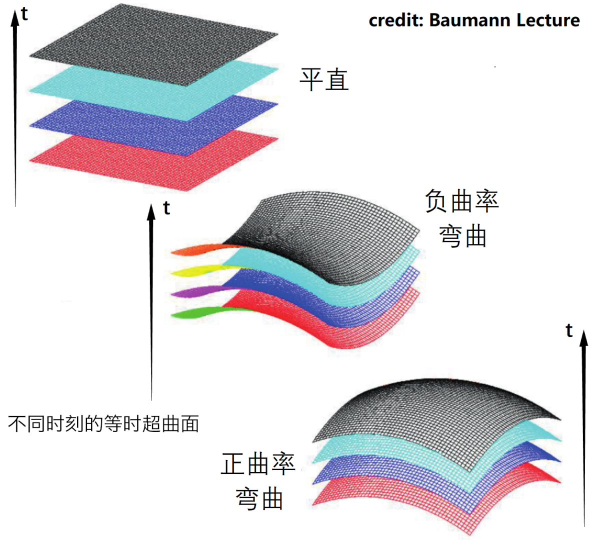
$$ds^2 = \text{时间的函数}a(\eta) \times \text{静态度规}$$

- 光子沿类光测地线运动： $ds^2 = 0$。对于沿径向传播的光子 $(d\theta = d\varphi = 0)$ 有 $-d\eta^2 + d\chi^2 = 0$, 光子从 $t = 0$ 到 t 时刻传播的共动距离为

$$\eta = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}\,.$$

（教材 (2.41) 式）

FLRW 宇宙的几何性质——空间曲率



FLRW 宇宙的几何性质——空间曲率

- 通过对 r 进行坐标变换可以将 k 取 $+1, 0$ 或 -1。

例：设 $k = -3$, 定义 $\tilde{r} \equiv \sqrt{|k|}r$，以及 $\tilde{a} = (1/\sqrt{|k|})a$, 变换后的线元为

$$ds^2 = -dt^2 + \tilde{a}^2(t)\left[\frac{d\tilde{r}^2}{1-\tilde{r}^2} + \tilde{r}^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right],$$

但是不能通过坐标变换改变 k 的符号。我们需要考虑三种空间超曲面：$k = -1, 0, +1$

FLRW 宇宙的几何性质——空间曲率

- $k=+1$ 时空的等时 ($\mathrm{d}t=0$) 超曲面，是正的、常曲率的、均匀各向同性空间，它的三维空间度规是

$$\mathrm{d}\ell^2 = a^2(t_\star)\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-r^2} + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right)\right],$$

- 该空间是镶嵌在四维欧几里得空间中的三维超球面：定义新坐标 $\mathrm{d}\chi^2 = \mathrm{d}r^2/(1-r^2), \chi(r=0)=0$, 积分可得 $r=\sin\chi$, 上面的度规化为

$$\mathrm{d}\ell^2 = a^2(t_\star)\left[\mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right)\right],$$

  这是半径为 $a(t_\star)$ 的三维超球面度规
- $k=+1$ 的宇宙模型称为**封闭的 (closed)** FLRW 宇宙$\cdots$

FLRW 宇宙的几何性质——空间曲率

- $k=-1$ 时空的等时 ($\mathrm{d}t=0$) 超曲面，是负的、常曲率的、均匀各向同性空间，它的三维空间度规是

$$\mathrm{d}\ell^2 = a^2(t_\star)\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1+r^2} + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right)\right],$$

- 该空间是镶嵌在四维洛伦兹空间中的三维双曲面（推导略）
- $k=-1$ 的宇宙模型称为**开放的 (open)** FLRW 宇宙 $\cdots$

FLRW 宇宙的几何性质——空间曲率

- $k=0$ 时空的等时 ($\mathrm{d}t=0$) 超曲面，是曲率为零的均匀各向同性空间，它的三维空间度规是

$$\mathrm{d}\ell^2 = a^2(t_\star)\left[\mathrm{d}r^2 + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right)\right] .$$

  该空间是三维欧几里得空间

- 这种情况下 FLRW 度规在直角坐标系的分量是

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\right) ,$$

  即为教材 (2.4) 式。

- $k=0$ 的宇宙模型称为**平直的 (flat)** FLRW 宇宙⋯
- 教材正文假设了平直宇宙

FLRW 宇宙的运动学——测地线

- 四维时空中的自由粒子沿该时空的测地线运动，测地线方程（教材 (2.18) 式）：
$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} = -\Gamma^\mu_{\ \alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda}\,,$$
其中 Christoffel 符号 $\Gamma^\mu_{\ \alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{\alpha\nu,\beta}+g_{\beta\nu,\alpha}-g_{\alpha\beta,\nu})$ (教材 (2.19) 式)。
- FLRW 度规的非零分量: $g_{00} = -1, g_{ij} = a^2(t)\gamma_{ij}, g^{00} = -1, g^{ij} = a^{-2}(t)\gamma^{ij}$, 其中 γ^{ij} 与 γ_{ij} 互逆且各分量都与时间无关
- Christoffel 符号的非零分量为：

$$\Gamma^0_{\ ij} = a\dot{a}\gamma_{ij}\,,\quad \Gamma^i_{\ 0j} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^i_j\,,\quad \Gamma^i_{\ jk} = \frac{1}{2}\gamma^{i\ell}(\gamma_{k\ell,j}+\gamma_{j\ell,k}-\gamma_{jk,\ell})\,.$$

复习：四维动量

- 粒子世界线 $x^\mu = x^\mu(\lambda)$, λ: 仿射参量，对于有质量粒子，仿射参量可以取世界线线长 s
- 粒子的四动量定义为 $P^\mu \equiv \dfrac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}$
- 粒子四动量在某个坐标系的 0 分量是粒子在那个系中的能量:

$$P^0 = \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda} = E\,.$$

- 三维（物理）动量大小：$p^2 \equiv g_{ij}P^iP^j$
- $g_{\mu\nu}P^\mu P^\nu = m^2 \quad \rightarrow \quad E^2 - p^2 = m^2$

FLRW 宇宙的运动学——测地线

- 测地线方程（教材 (2.18) 式）$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} = -\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\lambda}$ 等号左侧用四动量表示：

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} = \frac{\mathrm{d}P^\mu}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\partial P^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda} = P^\alpha\frac{\partial P^\mu}{\partial x^\alpha}\,,$$

FLRW 宇宙的空间均匀性意味着 $\frac{\partial P^\mu}{\partial x^i} = 0$, 测地线方程化为

$$\boxed{P^0\frac{\mathrm{d}P^\mu}{\mathrm{d}t} = -\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}P^\alpha P^\beta\,.}$$

FLRW 宇宙的运动学——测地线

- 测地线方程的 0 分量 ($P^0 = E$)：

$$P^0 \frac{\mathrm{d}P^0}{\mathrm{d}t} = \boxed{E\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}} = -\Gamma^0{}_{ij} P^i P^j = a\dot{a}\gamma_{ij} P^i P^j = \frac{\dot{a}}{a} \underbrace{g_{ij} P^i P^j}_{\equiv p^2} = \boxed{\frac{\dot{a}}{a} p^2} .$$

- 对关系 $E^2 - p^2 = m^2$ 微分可得 $E\,\mathrm{d}E = p\,\mathrm{d}p$，带入上式得到

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} \quad \to \quad \boxed{p \propto \frac{1}{a}} ,$$

自由粒子的三维物理动量随着宇宙膨胀衰减。这一结论对有质量和无质量粒子都成立

FLRW 宇宙的运动学——测地线

- 无质量粒子 $(m=0)$： $E=p\propto\dfrac{1}{a}$, 在膨胀宇宙中传播的光子能量降低（宇宙学红移）（教材 (2.29) 式）
- 有质量粒子：定义粒子的（共动）本动速度 $v^i\equiv\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}$，以及（物理）本动速度大小 $v^2\equiv g_{ij}v^iv^j$，三维物理动量大小 p^2 可写为

$$p^2=g_{ij}P^iP^j=g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\lambda}=\underbrace{g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}}_{\equiv v^2}\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2}_{=E^2}=v^2E^2\,,$$

由此可得 $p=\dfrac{mv}{\sqrt{1-v^2}}\propto\dfrac{1}{a}$，这意味着自由的有质量粒子的本动速度 v 随宇宙膨胀而衰减趋于 0（收敛到哈勃流）。（第二章习题 4）

FLRW 宇宙的运动学——宇宙学红移

- 光子沿类光测地线 $\mathrm{d}s^2 = 0$ 传播，研究光的传播用共形时间特别方便：$\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}t/a(t)$。不失一般性，考虑沿径向传播的光 ($\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\varphi = 0$)，类光测地线为

$$a^2(\eta)(-\mathrm{d}\eta^2 + \mathrm{d}\chi^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\eta = \pm\Delta\chi \ .$$

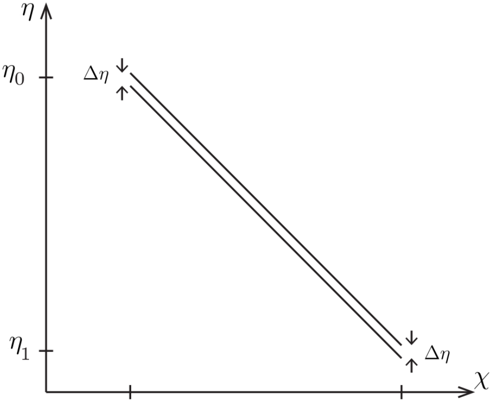
- 设共动距离 χ 的遥远星系在 η_1 时刻在 $\Delta\eta$ 时间段内发射光子（或者说，发出周期为 $\Delta\eta$ 的电磁波），在 η_0 时刻被地球接收到。
- 光源与观测者所经历的共形时间间隔相等，但物理时间间隔不一样：

$$\Delta t_1 = a(\eta_1)\,\Delta\eta \ , \quad \Delta t_0 = a(\eta_0)\,\Delta\eta \ .$$

FLRW 宇宙的运动学——宇宙学红移

- 光源与观测者所经历的共形时间间隔相等，但物理时间间隔不一样：

$$\Delta t_1 = a(\eta_1)\,\Delta\eta\ , \quad \Delta t_0 = a(\eta_0)\,\Delta\eta\ .$$



FLRW 宇宙的运动学——宇宙学红移

- 光波长：光源：$\lambda_1 = \Delta t_1$（已经设 $c=1$），地球：$\lambda_0 = \Delta t_0$，由此可得
$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{a(\eta_0)}{a(\eta_1)}$$
- 定义红移 $z \equiv \dfrac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \dfrac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1$, 即 $1+z = \dfrac{a(t_0)}{a(t_1)}$，通常定义 $a(t_0) \equiv 1$，从而有
$$\boxed{1+z = \frac{1}{a}}\,.$$

FLRW 宇宙的运动学——宇宙学红移

- 推导宇宙学红移的另一种方式
- 量子力学中，光子的波长和动量的关系为 $\lambda = h/p$
- 由于 $p \propto 1/a$，因此 $\boxed{\lambda \propto a}$ ，即 t_1 时刻发射出的 λ_1 光子在 t_0 被观测到时的波长为

$$\lambda_0 = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}\lambda_1 > \lambda_1 \text{，波长变长，发生红移}\cdots$$

- $z \equiv \dfrac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1}, \quad 1 + z = \dfrac{1}{a} \ (a(t_0) \equiv 1).$

FLRW 宇宙的运动学——哈勃定律

- 对于**邻近的**天体，可以对 $a(t_1)$ 在 $t=t_0$ 处进行泰勒展开：

$$\begin{aligned} a(t_1) &= a(t_0) + \dot{a}(t_0)(t_1 - t_0) + \cdots \\ &\approx a(t_0)\left[1 + H_0(t_1 - t_0)\right] \end{aligned}$$

  其中哈勃常量 $H_0 \equiv \dot{a}(t_0)/a(t_0)$.

- 邻近天体的距离 $d \approx c(t_1 - t_0) = (t_1 - t_0)$, 于是可得红移 $1 + z = 1/a$ 与距离的关系为

$$\boxed{z = H_0 d} \text{（哈 勃 定 律）} .$$

- 对于遥远（高红移）天体，距离-红移不再是简单的比例关系。第一，泰勒展开的高阶项不可忽略；第二，宇宙学尺度上的距离不再是简单的欧几里得情形

FLRW 宇宙的运动学——宇宙学距离

- 度规距离 S_k/共动距离 χ
- 角直径距离 d_A
- 光度距离 d_L

FLRW 宇宙的运动学——共动距离 χ

- $(\mathrm{d}\chi \equiv \mathrm{d}r/\sqrt{1-kr^2}, \chi(r=0)=0)$
- (FLRW 度规： $\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\left[\mathrm{d}\chi^2 + S_k^2(\chi)(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)\right]$)
- 红移为 z 的遥远天体在 $a = 1/(1+z)$ 时刻沿径向 $(\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\varphi = 0)$ 向地球发出光子，在 $t = 0$ 被地球接收到，光子轨迹 $\mathrm{d}s^2 = 0$，即 $-\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\,\mathrm{d}\chi^2 = 0$, 该天体的共动距离为

$$\chi(a) = \int_{t(z)}^{t_0} \frac{\mathrm{d}t'}{a(t')} = \int_a^1 \frac{\mathrm{d}a'}{a'^2 H(a')} .$$

（教材 (2.42) 式）

- 用红移表示的共动距离： $\chi(z) = \int_0^z \frac{\mathrm{d}z'}{H(z')}$.

FLRW 宇宙的运动学——度规距离 S_k

- FLRW 度规：$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\left[\mathrm{d}\chi^2 + S_k^2(\chi)\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right)\right]$，度规距离定义为与立体角元 $\mathrm{d}\Omega^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2$ 相乘的那个量：

$$S_k(\chi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|k|}}\sinh\left(\sqrt{k}\chi\right) & k < 0 \\ \chi & k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{k}}\sin\left(\sqrt{k}\chi\right) & k > 0 \end{cases}.$$

- 在平直宇宙中，度规距离等于共动距离 χ

FLRW 宇宙的运动学——角直径距离 d_A

- 静态欧几里得空间中，横向物理尺度为 ℓ 的标准尺所张成的视角为 θ，相应的角直径距离 $d_A = \ell/\theta$ ($\theta \ll 1$)
- 膨胀宇宙（FLRW 时空）中：设可作为标准尺的天体在 t 时刻（对应尺度因子 $a(t)$、红移 $z = 1/a - 1$）发出的光在 t_0 时刻被地球接收到。t 时刻，标准尺的横向物理尺度为 $\ell = a(t)S_k(\chi)\theta$，角直径距离

$$d_A = \frac{\ell}{\theta} = a(t)S_k(\chi) = a \times \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}}\sinh\left(\sqrt{|k|}\chi\right) & k < 0 \\ \chi & k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{k}}\sin\left(\sqrt{k}\chi\right) & k > 0 \end{cases}.$$

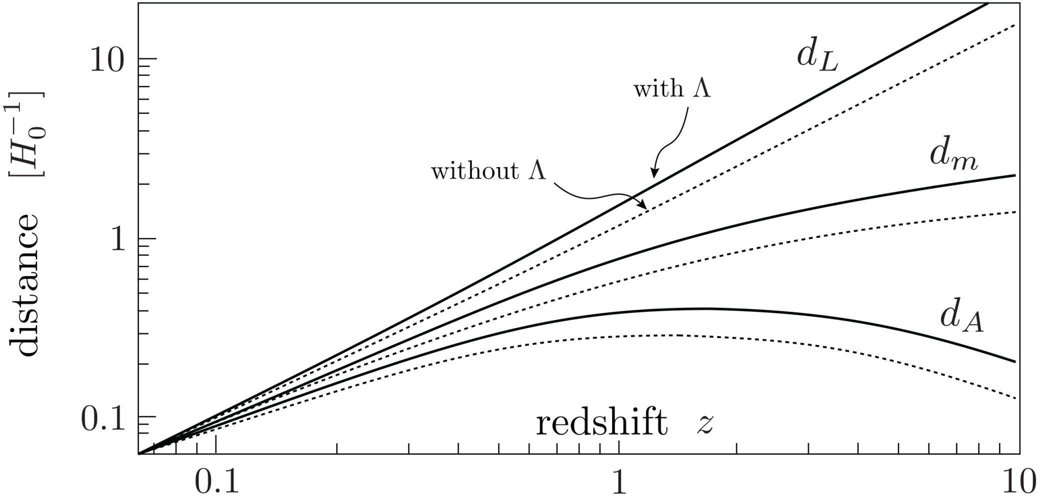
FLRW 宇宙的运动学——角直径距离 d_A

- $k = 0 : d_A = a\chi = \dfrac{\chi}{1+z}$，教材 (2.45) 式
- $k < 0 : d_A = \dfrac{a}{H_0\sqrt{|\Omega_k|}} \sinh[\sqrt{\Omega_k} H_0 \chi]$，教材 (2.46) 式
- $k > 0 : d_A = \dfrac{a}{H_0\sqrt{|\Omega_k|}} \sin[\sqrt{-\Omega_k} H_0 \chi]$
- 其中 $\Omega_k \equiv -k/(a_0^2 H_0^2), a_0 = 1$，见下文。

FLRW 宇宙的运动学——光度距离 d_L

- 静态欧几里得空间，绝对光度 L、观测流量 F、距离 d 之间的关系为 $F = L/(4\pi d^2)$
- 膨胀宇宙（FLRW 时空）中：设观测者位于原点，位于径向共动距离 χ 处的光源在 t 时刻（对应红移 z）发出的光在 t_0 时刻到达地球
  - t_0 时刻，以光源天体为中心、地球-光源距离为半径的球面的表面积为 $4\pi S_k^2(\chi)$
  - 发射与接收时的时间间隔 $\delta t_{\rm emit}$ 和 $\delta t_{\rm receive}$ 的关系为 $\delta t_{\rm receive} = \delta t_{\rm emit}(1+z)$，即光子的到达率比发射率降低了 $1/(1+z)$ 倍
  - 每个光子的到达地球时的能量比发射时降低了 $1/(1+z)$ 倍
  - 修正后的流量-绝对光度-距离的关系为 $F = \dfrac{L}{4\pi S_k^2(\chi)(1+z)^2} \equiv \dfrac{L}{4\pi d_L^2}$
- 其中定义了光度距离 $\boxed{d_L \equiv S_k(\chi)(1+z)}$. 在平直宇宙中：$d_L = \chi/a$（教材 (2.50) 式）

宇宙学距离



FLRW 宇宙的动力学——爱因斯坦场方程

- 爱因斯坦场方程（教材 (2.30) 式）：$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$
- 爱因斯坦张量 $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$，是 Ricci 张量、Ricci 标量 $R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ 与度规张量的组合
- Ricci 张量 $R_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\alpha} \Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu} \Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha}$.（(2.31) 式）
- 度规张量 $g_{\mu\nu} \Rightarrow$ Christoffel 符号 $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} \Rightarrow$ Ricci 张量 $R_{\mu\nu}$ 和标量 R
- （以下只考虑平直宇宙 $k = 0$）

FLRW 宇宙的动力学——爱因斯坦场方程

- 爱因斯坦场方程（教材 (2.30) 式）：$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$：10 个二阶偏微分方程组
- FLRW 度规的均匀各向同性意味着⋯⋯1. 空间导数消失；2. 独立方程的数目减少；3. 未知的函数只有尺度因子 $a(t)$
- 爱因斯坦场方程 +FLRW 度规 =Friedmann 方程：2 个关于尺度因子 $a(t)$ 的二阶常微分方程
- 剧透：Friedmann 方程为

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \qquad \text{0-0 分量}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) \qquad i\text{-}i \text{ 分量}$$

FLRW 宇宙的动力学——Christoffel 符号及其导数

- 时空坐标 (t,x,y,z)，FLRW 度规的非零分量及其导数为

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}-1 & \\ & a^2(t)\,\delta_{ij}\end{pmatrix}\,,\quad g^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}-1 & \\ & a^{-2}(t)\,\delta^{ij}\end{pmatrix}\,,$$

$$g_{ij,0}=2a\dot{a}\delta_{ij}\,,$$

其中 $\dot{a}=\mathrm{d}a/\mathrm{d}t$.

- Christoffel 符号 $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{\alpha\nu,\beta}+g_{\beta\nu,\alpha}-g_{\alpha\beta,\nu})$ (教材 (2.19) 式)。
非零分量:

$$\Gamma^{0}{}_{ij}=\delta_{ij}a\dot{a}=\delta_{ij}a^2H\,,\qquad \Gamma^{i}{}_{0j}=\frac{\dot{a}}{a}\delta^{i}_{j}=\frac{\dot{a}}{a}\delta^{i}{}_{j}\,,$$

$$\Gamma^{0}{}_{ij,0}=\delta_{ij}a^2\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2+\frac{\ddot{a}}{a}\right]\,,\qquad \Gamma^{i}{}_{0j,0}=\delta^{i}_{j}\left[\frac{\ddot{a}}{a}-\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]\,.$$

FLRW 宇宙的动力学——Ricci 张量和 Ricci 标量

Ricci 张量 $R_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha}$.

非零分量：

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}\,, \quad R_{ij} = \delta_{ij}\left(2\dot{a}^2 + a\ddot{a}\right)\,.$$

Ricci 标量：

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = 6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]\,.$$

FLRW 宇宙的动力学——能量-动量张量

- 均匀各向同性理想流体的能量-动量张量的分量为

$$T^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} -\rho(t) & \\ & \mathscr{P}(t)\delta_{ij} \end{pmatrix} ,$$

其中 $\rho, \mathscr{P}$ 分别是理想流体的密度/压强。

- 能量-动量守恒可以表示为能动张量的四维散度为零（连续性方程）: $T^{\mu}{}_{\nu;\mu} = 0$ ((2.52) 式)，考虑它的 $\nu = 0$ 分量可得：((2.55) 式)

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + \mathscr{P}) = 0 \,.$$

FLRW 宇宙的动力学——宇宙的组分

- **物质** (matter)： 压强远小于能量密度, $|P| \ll \rho, P \approx 0$. 从下文的平衡态热力学可以看到，这对应于能量密度由质能主导的、非相对论性的粒子气体。设 (2.55) 式中的 $P = 0$ 解得

$$\rho_m \propto a^{-3} ,$$

这意味着物质的能量密度随着体积的膨胀 $V \propto a^{-3}$ 而稀释.

  - **暗物质**. 宇宙的大部分物质是不可见的暗物质，通常假设它是一种新的（超越粒子物理标准模型）粒子
  - **重子**. 搞宇宙学的把普通物质（原子核/电子）都叫重子⋯⋯

FLRW 宇宙的动力学——宇宙的组分

- **辐射** (radiation)：压强等于能量密度三分之一的组分，$P = \dfrac{1}{3}\rho$. 这是能量密度由动能主导的、动量远大于质量的相对论性粒子气体。设 (2.55) 式中 $P = (1/3)\rho$ 解得

$$\rho_r \propto a^{-4} \ ,$$

辐射的能量密度除了随体积膨胀稀释以外，还包括红移 $E \propto a^{-1}$.

  - **光子**. 光子质量为零，总是相对论性粒子
  - **中微子**. 早期宇宙：中微子动能远大于质能，像辐射；晚期：动能小于质能，像物质

- **暗能量**. 负压强流体：$P = -\rho$，带入连续性方程 (2.55) 解得

$$\rho \propto a^{0} \ ,$$

暗能量的能量密度不随宇宙膨胀而稀释……

FLRW 宇宙的动力学——宇宙的组分

- 大部分宇宙流体可以用状态方程参数 $w \equiv P/\rho$ 参数化，根据连续性方程可得：

$$\rho \propto a^{-3(1+w)} = \begin{cases} a^{-3}\,, & \text{matter} \\ a^{-4}\,, & \text{radiation} \\ a^{0}\,, & \text{vacuum} \end{cases} .$$

FLRW 宇宙的动力学——Friedmann 方程

- 爱因斯坦场方程 $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu}$ 的 00 分量：

$$\boxed{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}},$$

（曲率项 $-k/a^2$ 的推导不做要求⋯⋯）

- 定义当今时刻的临界密度 $\boxed{\rho_{\mathrm{crit},0} \equiv 3H_0^2/(8\pi G)}$，上式化为

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\rho}{\rho_{\mathrm{crit},0}} - \frac{k}{H_0^2 a^2}. \quad \text{教材 (2.40) 式}$$

其中 $\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda + \ldots$ 是宇宙中所有组分的能量密度之和。

FLRW 宇宙的动力学——Friedmann 方程

- Friedmann 方程

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\rho}{\rho_{\mathrm{crit},0}} - \frac{k}{H_0^2 a^2} = \frac{1}{\rho_{\mathrm{crit},0}}(\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda) - \frac{k}{H_0^2 a^2}$$

$$= \frac{1}{\rho_{\mathrm{crit},0}}\left[\rho_{m0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \rho_{r0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \rho_\Lambda\right] - \frac{k}{H_0^2 a^2}$$

$$H^2(a) = H_0^2\left[\Omega_{m0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{r0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{k0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^2\right]$$

- 其中定义了物质、辐射、宇宙学常数和曲率对应的密度参数

$$\Omega_{m0} \equiv \frac{\rho_{m0}}{\rho_{\mathrm{crit},0}} \qquad \Omega_{r0} \equiv \frac{\rho_{r0}}{\rho_{\mathrm{crit},0}},$$

$$\Omega_{\Lambda 0} \equiv \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{\mathrm{crit},0}} \qquad \Omega_{k0} \equiv -\frac{k}{H_0^2 a_0^2}.$$

FLRW 宇宙的动力学——Friedmann 方程

- 通常设当今的尺度因子 $a_o = 1$, Friedmann 方程写为

$$H(a) = H_o\sqrt{\Omega_{mo}a^{-3} + \Omega_{ro}a^{-4} + \Omega_{ko}a^{-2} + \Omega_{\Lambda o}}\ .$$

- $a = 1 \Rightarrow \Omega_{mo} + \Omega_{ro} + \Omega_{ko} + \Omega_{\Lambda o} = 1.$

Parameter	TT+lowE 68% limits	TE+lowE 68% limits	EE+lowE 68% limits	TT,TE,EE+lowE 68% limits	TT,TE,EE+lowE+lensing 68% limits	TT,TE,EE+lowE+lensing+BAO 68% limits
$\Omega_b h^2$	0.02212 ± 0.00022	0.02249 ± 0.00025	0.0240 ± 0.0012	0.02236 ± 0.00015	0.02237 ± 0.00015	0.02242 ± 0.00014
$\Omega_c h^2$	0.1206 ± 0.0021	0.1177 ± 0.0020	0.1158 ± 0.0046	0.1202 ± 0.0014	[illegible]	[illegible]
$100\theta_{MC}$	1.04077 ± 0.00047	1.04139 ± 0.00049	1.03999 ± 0.00089	1.04090 ± 0.00031	[illegible]	[illegible]
τ	0.0522 ± 0.0080	0.0496 ± 0.0085	0.0527 ± 0.0090	$0.0544^{+0.0070}_{-0.0081}$	[illegible]	[illegible]
$\ln(10^{10}A_s)$	3.040 ± 0.016	$3.018^{+0.020}_{-0.018}$	3.052 ± 0.022	3.045 ± 0.016	3.044 ± 0.014	3.047 ± 0.014
n_s	0.9626 ± 0.0057	0.967 ± 0.011	0.980 ± 0.015	0.9649 ± 0.0044	0.9649 ± 0.0042	0.9665 ± 0.0038
H_0 [km s^{-1} Mpc^{-1}] . .	66.88 ± 0.92	68.44 ± 0.91	69.9 ± 2.7	67.27 ± 0.60	67.36 ± 0.54	67.66 ± 0.42
Ω_Λ	0.679 ± 0.013	0.699 ± 0.012	$0.711^{+0.033}_{-0.026}$	0.6834 ± 0.0084	0.6847 ± 0.0073	0.6889 ± 0.0056
Ω_m	0.321 ± 0.013	0.301 ± 0.012	$0.289^{+0.026}_{-0.033}$	0.3166 ± 0.0084	0.3153 ± 0.0073	0.3111 ± 0.0056
$\Omega_m h^2$	0.1434 ± 0.0020	0.1408 ± 0.0019	$0.1404^{+0.0034}_{-0.0039}$	0.1432 ± 0.0013	0.1430 ± 0.0011	0.14240 ± 0.00087
Ωh^3	0.09589 ± 0.00046	0.09635 ± 0.00051	$0.0981^{+0.0016}$	0.09633 ± 0.00029	0.09633 ± 0.00030	0.09635 ± 0.00030

Planck 2018 results
arXiv:1807.06209

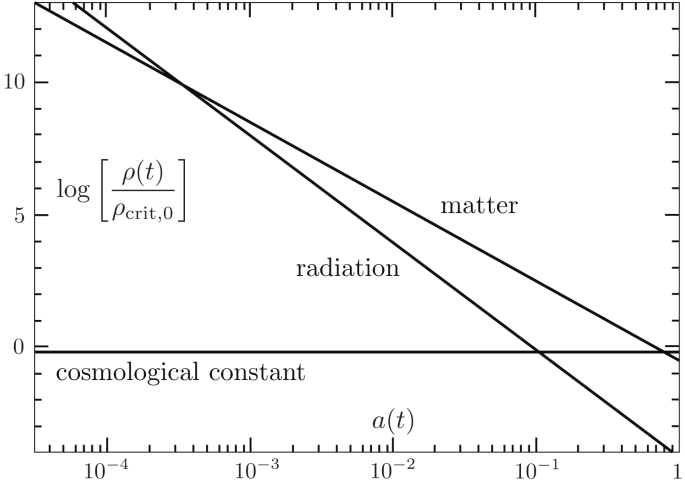
FLRW 宇宙的动力学——Friedmann 方程

- 爱因斯坦场方程 $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = T_{\mu\nu}$ 的 ii 分量：

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P)}\,.$$

FLRW 宇宙的动力学——Friedmann 方程

- 辐射为主 → 物质为主 → 暗能量为主



FLRW 宇宙的动力学——Friedmann 方程

- 单一组分的宇宙：$\rho_I \propto a^{-3(1+w_I)}, I =$ 物质/辐射/暗能量，带入 Friedmann 方程：

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \Omega_{I0} a^{-3(1+w_I)} \Rightarrow a(t) \propto \begin{cases} t^{2/[3(1+w_I)]} & w_I \neq -1 \\ e^{Ht} & w_I = -1 \end{cases}$$

物质为主时期：$w = 0, a \propto t^{2/3}$; 辐射为主时期：$w = 1/3, a \propto t^{1/2}$.

FLRW 宇宙的动力学——Friedmann 方程

- 两种组分的宇宙：辐射为主 → 物质为主之间，物质-辐射密度相等时刻为

$$a_{\rm eq} = \frac{\Omega_{ro}}{\Omega_{mo}} \sim 3\times 10^{-4}\,,$$

（质子-自由电子复合、CMB 形成发生在 $a_{\rm rec}\sim 9\times 10^{-4}$，即 CMB 形成在物质/辐射两种组分为主的背景宇宙中）

- 解 Friedmann 方程可得 $a(\eta) = a_{\rm eq}\left[\left(\frac{\eta}{\eta_\star}\right)^2 + 2\left(\frac{\eta}{\eta_\star}\right)\right]$，其中 $\eta_\star \equiv \eta_{\rm eq}/(\sqrt{2}-1)$
- 推导参见 Baumann 讲义第一章最后一节，另外参见教材本章习题 11

作业

- 计算 FLRW 时空的三维等时超曲面 $(\mathrm{d}t = 0)$ 的三维 Ricci 标量 $R^{(3)}$
- 既然物质使时空弯曲，那么为什么会有 $k = 0$ 的“平直”宇宙？
- 前面定义了两个本动速度 $v_{\mathrm{pec}} \equiv a(t)\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ 和
  $v^2 = g_{ij}v^iv^j = g_{ij}\dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}$ ——
  - 证明这两个定义是一致的；或者：
  - 证明其中一个定义更“正确”。
- 教材第二章习题 3、4、11、17
  - 3：广义相对论如何回到牛顿力学，之后的牛顿规范会用到
  - 4：膨胀宇宙中大质量自由粒子的行为，前面已推导过
  - 11：物质-辐射两种组分的均匀宇宙解
  - 17：膨胀宇宙的守恒量——熵密度