

# 宇宙学

## 第 3 讲 超越平衡态：复合过程、暗物质遗迹、原初氦丰度

Cheng-Zong Ruan

cheng-zong.ruan@durham.ac.uk



ICC, Durham

last update: January 7, 2022

# 超越平衡态

- ▶ 对于粒子质量为  $m$  的组分，当宇宙温度  $T$  降低到小于  $m$  之后，该组分退化到非相对论极限，服从麦克斯韦-玻尔兹曼分布：

$$f \approx e^{-m/T} \rightarrow 0,$$

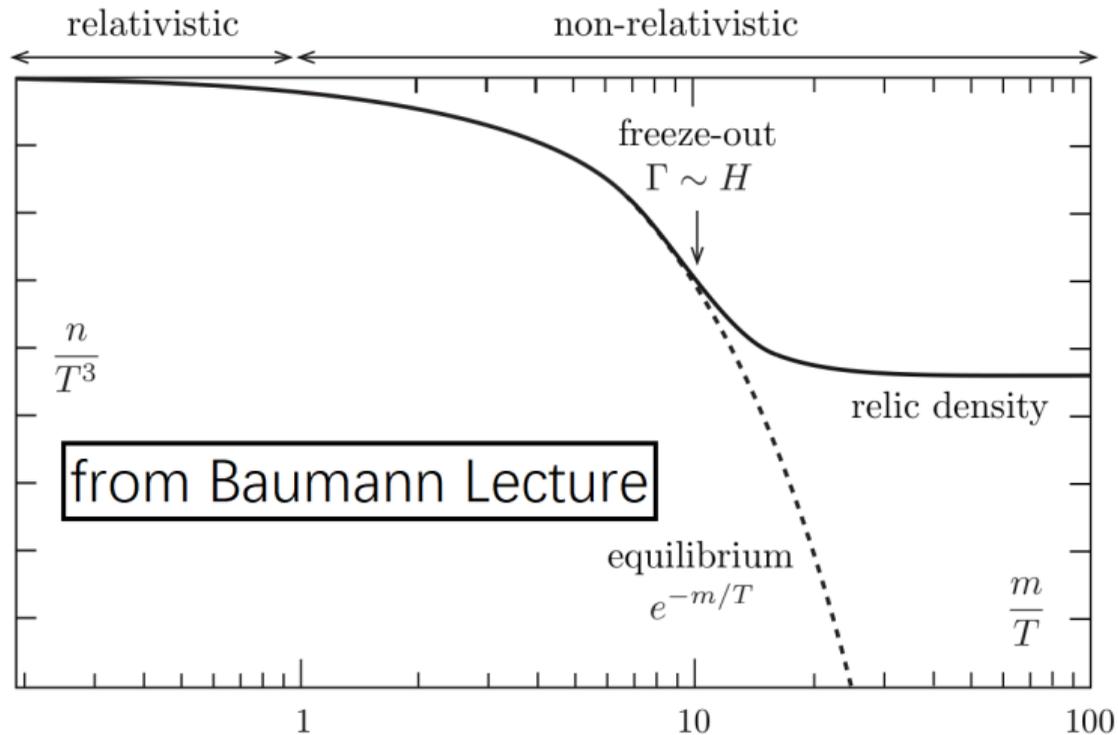
于是

$$n \sim \int d^3\vec{p} f(p) \rightarrow 0; \quad \rho \sim \int d^3\vec{p} f(p) \sqrt{m^2 + p^2} \rightarrow 0$$

- ▶ 这意味着，如果宇宙**始终处于平衡态**，那么占主导的组分始终是辐射 (CMB)。这显然与观测不符…
- ▶ 当相互作用率  $\Gamma$  远远小于膨胀率  $H$  时，偏离平衡态：freeze-out

# freeze-out, 遗迹密度

- ▶ 当相互作用率  $\Gamma$  远远小于膨胀率  $H$  时，偏离平衡态：freeze-out



# 玻尔兹曼方程

- ▶ 描述超越平衡态的方程是**玻尔兹曼方程**  $\frac{1}{a^3} \frac{d(n_i a^3)}{dt} = C_i[\{n_j\}]$  .  
其中碰撞项  $C_i[\{n_j\}]$  取决于所考虑的相互作用。我们处理的相互作用的形式都如同  $1 + 2 \longleftrightarrow 3 + 4$  (两体作用概率  $\gg$  N 体)
- ▶ 形如  ${}^4\text{He} + {}^4\text{He} + {}^4\text{He} \longleftrightarrow {}^{12}\text{C}$  的过程需要很大的密度 (例如, 恒星内部)
- ▶ 复合:  $e^- + p^+ \longleftrightarrow \text{H} + \gamma$ ; 自由电子与原子核 (质子) 结合成氢原子并放出一个光子
- ▶ 正反暗物质粒子湮灭:  $X + \bar{X} \longleftrightarrow l + \bar{l}$
- ▶ 大爆炸核合成 (BBN) ...
  - ▶ 氘合成:  $n + p^+ \longleftrightarrow \text{D} + \gamma$
  - ▶ 氦合成:  $\text{D} + p^+ \longleftrightarrow {}^4\text{He} + \gamma, \text{D} + {}^3\text{He} \longleftrightarrow {}^4\text{He} + p^+$

# 宇宙热历史 (抄自 Baumann 讲义表格 3.1)

事件	时刻 $t$	红移 $z$	温度 $T$
暴胀	$\gtrsim 10^{-34}$ s		
暗物质脱耦	?	?	?
中微子脱耦	1 s	$6 \times 10^9$	1 MeV
电子-正电子湮灭	6 s	$2 \times 10^9$	500 keV
大爆炸核合成	3 min	$4 \times 10^8$	100 keV
物质-辐射相等	60 kyr	3400	0.75 eV
复合	260 ~ 380 kyr	1100-1400	0.26-0.33 eV
光子脱耦	380 kyr	1100	0.26 eV
再电离	100-400 Myr	10-30	2.6-7.0 meV
暗能量-物质相等	9 Gyr	0.4	0.33 meV
当今	13.8 Gyr	0	0.24 meV

# 玻尔兹曼方程

- ▶ 考虑组分 1 的数密度演化，玻尔兹曼方程可以化为：

$$\frac{1}{a^3} \frac{d(n_1 a^3)}{dt} = -\langle \sigma v \rangle \left[ n_1 n_2 - \left( \frac{n_1 n_2}{n_3 n_4} \right)_{\text{eq}} n_3 n_4 \right].$$

(教材 (3.9) 式、Baumann 讲义 (3.3.85) 式)

其中  $\sigma$  是相互作用的散射截面，计算过程见 QFT 课程； $v$  表示粒子 1 和 2 之间的相对速度；尖括号  $\langle \rangle$  表示取平均； $n_{\text{eq}}$  是上一讲推导的平衡态数密度

- ▶ 本章的核心方程，它描述了偏离平衡态的演化
- ▶ 为了避免分散注意力，下一讲再详述它的推导

# 玻尔兹曼方程

$$\frac{1}{a^3} \frac{d(n_1 a^3)}{dt} = -\langle \sigma v \rangle \left[ n_1 n_2 - \left( \frac{n_1 n_2}{n_3 n_4} \right)_{\text{eq}} n_3 n_4 \right]$$



(交往前)

$$\frac{1}{a^3} \frac{d(n_1 a^3)}{dt} = \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \int \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4} \times (2\pi)^4 \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) |\mathcal{M}|^2 \times \{f_3 f_4 [1 \pm f_1] [1 \pm f_2] - f_1 f_2 [1 \pm f_3] [1 \pm f_4]\}$$



(交往后)

# 玻尔兹曼方程

- ▶ 定义共动数密度  $N_i \equiv n_i/s$  (熵密度  $s \propto a^{-3}$ ), 上式可以化为

$$\frac{d \ln N_1}{d \ln a} = -\frac{\Gamma_1}{H} \left[ 1 - \left( \frac{N_1 N_2}{N_3 N_4} \right)_{\text{eq}} \frac{N_3 N_4}{N_1 N_2} \right]$$

其中  $\Gamma_1 \equiv n_2 \langle \sigma v \rangle$  是相互作用率

- ▶ 当  $\Gamma_1 \gg H$  (相互作用率远大于膨胀率), 系统趋于平衡态...
  - 如果初始时  $N_1 \gg N_1^{\text{eq}}$ , 则上式等号右侧  $\sim -\Gamma_1/H$  是很大的负值, 即粒子 1 被大量消灭, 趋于平衡值  $N_1^{\text{eq}}$
  - 如果初始时  $N_1 \ll N_1^{\text{eq}}$ , 则上式等号右侧  $\sim (\Gamma_1/H)(N_1^{\text{eq}}/N_1)$  是很大的正值, 即粒子 1 被大量产生, 趋于平衡值  $N_1^{\text{eq}}$

# 暗物质遗迹

- ▶ 假设暗物质粒子是 WIMP (weakly interacting massive particle, 相互作用弱的大质量粒子)
- ▶ 在高温的宇宙早期, WIMP 和宇宙等离子体紧密耦合, 在温度降低到典型值  $T_f$  之后 freeze-out, 共动数密度几乎不变——遗迹密度
- ▶ 假设大质量的暗物质粒子  $X$  及其反粒子  $\bar{X}$  湮灭产生两个轻的粒子  $l, \bar{l}$ :  
$$X + \bar{X} \longleftrightarrow l + \bar{l}$$
- ▶ 再假设...  $l$  与  $\bar{l}$  与其它组分紧密耦合 (例如它们带电荷), 因此可以认为它们始终保持平衡态:  $n_l = n_l^{\text{eq}}, n_{\bar{l}} = n_{\bar{l}}^{\text{eq}}$
- ▶ 再再假设... 正反暗物质粒子之间没有不对称性:  $n_X = n_{\bar{X}}$

# 暗物质遗迹

- ▶ 在上述假设下，WIMP 数密度的玻尔兹曼方程为

$$\frac{dN_X}{dt} = -s\langle\sigma v\rangle [N_X^2 - (N_X^{\text{eq}})^2]$$

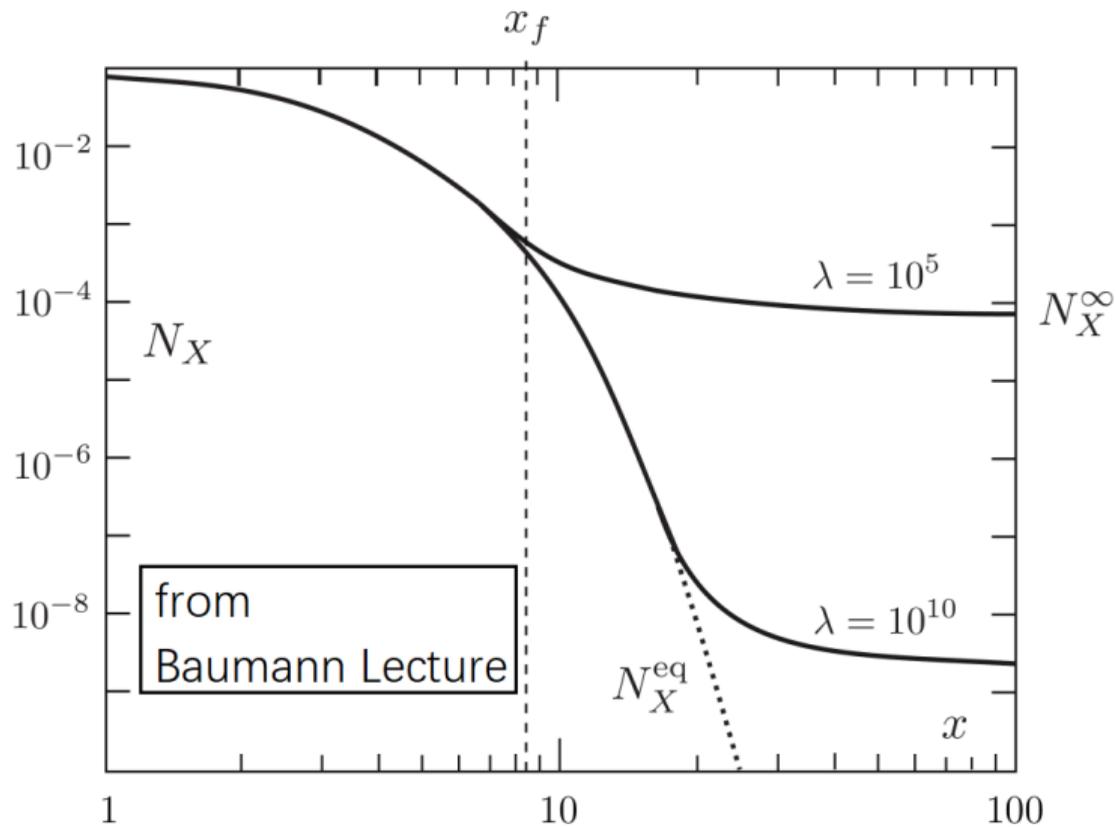
其中共动数密度  $N_X \equiv n_X/s$ ,  $N_X^{\text{eq}} \equiv n_X^{\text{eq}}/s$ , 熵密度  $s \propto a^{-3}$

- ▶ WIMP freeze-out 过程发生在粒子的质量  $T \sim M_X$  附近，用它定义新的温度坐标  $x \equiv M_X/T$  是方便的
- ▶ 将自变量从  $t$  变换为  $x$ ，得到暗物质粒子的玻尔兹曼方程（教材 (3.52) 式）

$$\frac{dN_X}{dx} = -\frac{\lambda}{x^2} [N_X^2 - (N_X^{\text{eq}})^2]$$

其中  $\lambda \equiv \frac{2\pi^2}{45} g_{\star S} \frac{M_X^2 \langle\sigma v\rangle}{H(M_X)}$ ，可作为常量处理

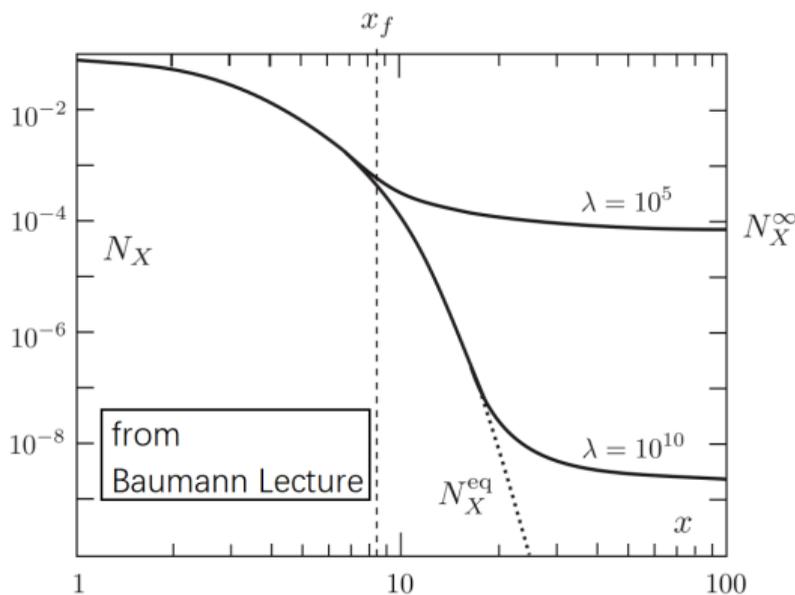
# 暗物质遗迹



# 暗物质遗迹

- ▶ 高温、早期:  $x \equiv M_X/T < 1$ ,  $N_X = N_X^{\text{eq}}$
- ▶ 温度降低 ( $x \gg 1$ ): freeze-out ( $x \sim x_f \sim 10$ ), 暗物质粒子演化偏离平衡态
- ▶ 暗物质遗迹丰度:  $N_X^\infty \equiv N_X(x \rightarrow \infty)$ , 即完全 freeze-out 之后的暗物质密度。
- ▶ 利用数值解的行为对遗迹密度做一估算……

# 暗物质遗迹



▶ freeze-out 阶段:  $N_X \gg N_X^{\text{eq}}$ , 演化方程化为

$$\frac{dN_X}{dx} \approx -\frac{\lambda N_X^2}{x^2} \quad (x > x_f)$$

▶ 上式从  $x_f$  到  $x = \infty$  积分得到  $\frac{1}{N_X^\infty} - \frac{1}{N_X^f} = \frac{\lambda}{x_f}$

▶ 由数值解:  $N_X^f \gg N_X^\infty$ , 由此可得

$$N_X^\infty \approx \frac{x_f}{\lambda}$$

▶ 相互作用率  $\lambda \uparrow$ , 遗迹丰度  $\downarrow$

# 复合 (recombination)

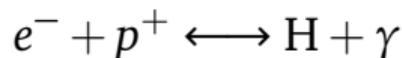
- ▶ 宇宙温度  $T > 1\text{eV}$  的时候，等离子体的成分依然是光子、自由电子和原子核（质子），光子与电子通过康普顿散射、电子和质子通过库仑散射紧密耦合，没有氢原子
- ▶ 随着温度降低，自由电子和原子核结合形成中性的氢原子——**复合 (recombination) 过程**
- ▶ 虽然名字是“复”合 (recombination)，但这是电子和原子核的第一次结合
- ▶ 自由电子密度剧烈降低，光子与电子散射的平均自由程急剧增大、甚至大于宇宙的尺度（视界）——光子与物质**脱耦**、宇宙变得透明、CMB 形成了

# 宇宙热历史 (抄自 Baumann 讲义表格 3.1)

事件	时刻 $t$	红移 $z$	温度 $T$
暴胀	$\gtrsim 10^{-34}$ s		
暗物质脱耦	?	?	?
中微子脱耦	1 s	$6 \times 10^9$	1 MeV
电子-正电子湮灭	6 s	$2 \times 10^9$	500 keV
大爆炸核合成	3 min	$4 \times 10^8$	100 keV
物质-辐射相等	60 kyr	3400	0.75 eV
复合	260 ~ 380 kyr	1100-1400	0.26-0.33 eV
光子脱耦	380 kyr	1100	0.26 eV
再电离	100-400 Myr	10-30	2.6-7.0 meV
暗能量-物质相等	9 Gyr	0.4	0.33 meV
当今	13.8 Gyr	0	0.24 meV

# 平衡态演化

- ▶ 宇宙温度  $T > 1\text{eV}$  的时候，电子和质子通过库仑散射紧密耦合:



- ▶ 平衡态丰度 (数密度)

$$n_i^{\text{eq}} = g_i \left( \frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp\left( \frac{\mu_i - m_i}{T} \right),$$

其中  $i = \{e, p, \text{H}\}$ , 化学平衡意味着化学势  $\mu_p + \mu_e = \mu_{\text{H}}$  (光子化学势为零)

# 平衡态演化

- ▶ 利用化学势的关系，考虑数密度的比值从而消去化学势：

$$\left(\frac{n_{\text{H}}}{n_e n_p}\right)_{\text{eq}} = \frac{g_{\text{H}}}{g_e g_p} \left(\frac{m_{\text{H}}}{m_e m_p} \frac{2\pi}{T}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{m_p + m_e - m_{\text{H}}}{T}\right)$$

- ▶ 乘积因子中的  $\frac{m_{\text{H}}}{m_e m_p}$  近似为 1 可以忽略；指数中的氢原子结合能  $B_{\text{H}} \equiv m_p + m_e - m_{\text{H}} \approx 13.6 \text{ eV}$  不能忽略；内禀自由度  $g_p = g_e = 2, g_{\text{H}} = 4$ ，上式化为

$$\left(\frac{n_{\text{H}}}{n_e^2}\right)_{\text{eq}} = \left(\frac{2\pi}{m_e T}\right)^{3/2} e^{B_{\text{H}}/T}$$

# 平衡态演化

- ▶ 为描述自由电子数目的演化，定义自由电子比例  $X_e \equiv \frac{n_e}{n_b}$
- ▶ 其中  $n_b$  是中子数密度，将它写为  $n_b = \eta_b n_\gamma = \eta_b \times \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3$
- ▶ 再其中  $\dots \eta_b = 5.5 \times 10^{-10} (\Omega_b h^2 / 0.020)$  是重子-光子比例，CMB 观测可以得到该参数的值
- ▶ 忽略比质子更重的原子核，重子数 = 质子 + 氢原子数：  
 $n_p \approx n_p + n_H = n_e + n_H$ ，自由电子比例表示为  $\frac{1-X_e}{X_e^2} = \frac{n_H}{n_e^2} n_b$ ，带入上一  
页最后一个方程得到 Saha 方程：

$$\left( \frac{1-X_e}{X_e^2} \right) = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \eta_b \left( \frac{2\pi T}{m_e} \right)^{3/2} e^{B_H/T}$$

# 平衡态演化: Saha 方程

Saha 方程: 
$$\left(\frac{1-X_e}{X_e^2}\right)_{\text{eq}} = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \eta_b \left(\frac{2\pi T}{m_e}\right)^{3/2} e^{B_H/T}.$$

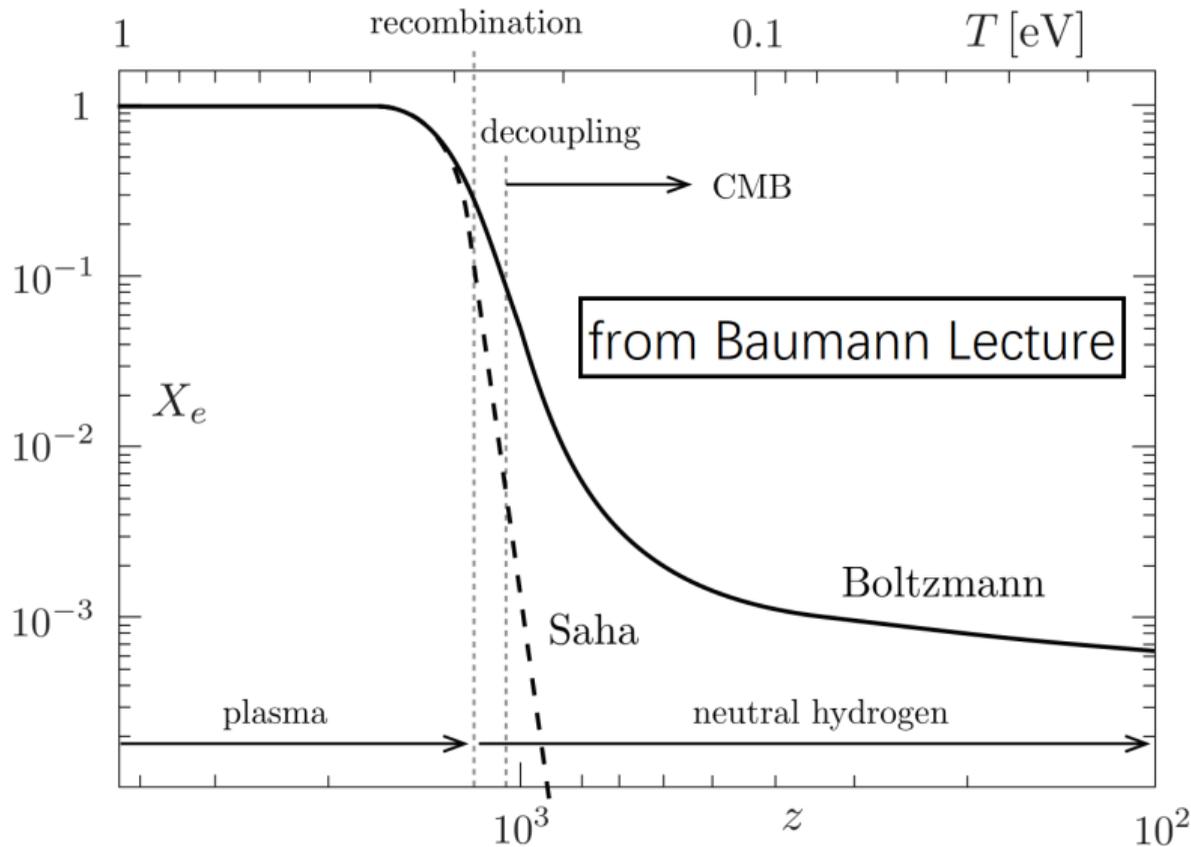


Megh Nad Saha



Saratoga

# 平衡态演化

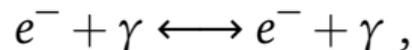


# 氢复合

- ▶ 定义复合时刻的温度  $T_{\text{dec}}$  为自由电子比例  $X_e(T_{\text{dec}}) = 10^{-1}$  (90% 的电子与质子结合成氢原子)。(10<sup>-1</sup> 这个值是随便挑的)
- ▶ 根据平衡态演化 (Saha 方程),  $T_{\text{dec}} \approx 0.3 \text{ eV} = 3600 \text{ K}$
- ▶ 当今时刻 CMB 温度  $T_0 \approx 2.7 \text{ K}$ , 由此可得复合时期的红移  $z_{\text{rec}} \approx 1320$
- ▶ 物质-辐射相等的红移为  $z_{\text{eq}} \sim 3500$ , 因此复合发生在物质为主时期…

# 超越平衡态：光子脱耦

- ▶ 宇宙早期，光子与原初等离子体通过 Thomson 散射紧密耦合：



相互作用率  $\Gamma_\gamma \approx n_e \sigma_T$ , Thomson 散射截面  $\sigma_T \approx 2 \times 10^{-3} \text{ MeV}^{-2}$

- ▶ 相互作用率随着自由电子密度的剧烈降低而降低， $\Gamma_\gamma$  降低到与膨胀率相等时，光子与自由电子脱耦 (decoupling)：

$$\Gamma_\gamma(T_{\text{dec}}) \sim H(T_{\text{dec}})$$

- ▶ 
$$\Gamma_\gamma(T_{\text{dec}}) = n_b X_e(T_{\text{dec}}) \sigma_T = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \eta_b \sigma_T X_e(T_{\text{dec}}) T_{\text{dec}}^3$$

- ▶ 
$$H_{\text{dec}}(T_{\text{dec}}) = H_0 \sqrt{\Omega_{m0}} (T_{\text{dec}}/T_0)^{3/2}$$

# 超越平衡态：光子脱耦

- ▶ 利用  $\Gamma_\gamma(T_{\text{dec}}) \sim H(T_{\text{dec}})$  以及 Saha 方程，可以得到  $T_{\text{dec}} \sim 0.27 \text{ eV}$
- ▶ 尽管氢复合 ( $T_{\text{rec}} = 0.3 \text{ eV}$ ) 与光子脱耦的温度相差不大，但是自由电子比例急剧降低：

$$X_e(T_{\text{rec}}) \sim 0.1, \quad X_e(T_{\text{dec}}) \sim 0.01$$

光子与等离子体脱耦、在宇宙中自由穿行、宇宙变得透明需要等离子体处于高度中性

- ▶ 同理可以估算出脱耦时的红移与时刻为

$$z_{\text{dec}} \sim 1100, \quad t_{\text{dec}} \sim 380\,000 \text{ 年}$$

- ▶ 在脱耦之后，光子自由传播，观测 CMB 最早可以探测到最后一次光子-电子散射时期的情况

# 超越平衡态：自由电子 freeze-out

- ▶ 库仑散射  $e^- + p^+ \longleftrightarrow H + \gamma$  的反应率低于膨胀率之后，自由电子 freeze-out，共动数密度几乎不变（物理数密度  $\propto a^{-3}$ ）
- ▶ 求解玻尔兹曼方程

$$\frac{1}{a^3} \frac{d(n_1 a^3)}{dt} = -\langle \sigma v \rangle \left[ n_1 n_2 - \left( \frac{n_1 n_2}{n_3 n_4} \right)_{\text{eq}} n_3 n_4 \right].$$

- ▶ 中性氢原子密度用平衡态近似：  $n_H \approx n_H^{\text{eq}}$ ，电子的玻尔兹曼方程：

$$\frac{1}{a^3} \frac{d(n_e a^3)}{dt} = -\langle \sigma v \rangle \left[ n_e^2 - (n_e^{\text{eq}})^2 \right].$$

# 超越平衡态：自由电子 freeze-out

- ▶ 平均散射截面从 QFT 的第一性原理计算…可以近似为  $\langle\sigma v\rangle \approx \sigma_T(B_H/T)^{1/2}$
- ▶ 将电子密度用自由电子比例表示：  $n_e = n_b X_e$ ，考虑到  $n_b \propto a^{-3}$ ，玻尔兹曼方程化为

$$\frac{dX_e}{dx} = -\frac{\lambda}{x^2} [X_e^2 - (X_e^{\text{eq}})^2]$$

其中  $x \equiv B_H/T$ ,  $\lambda \equiv [n_b \langle\sigma v\rangle / (xH)]_{x=1} = 3.9 \times 10^3 (\Omega_b h / 0.03)$

- ▶ 与前面暗物质的玻尔兹曼方程形式相同…同理可估算得到自由电子的遗迹密度为

$$X_e^\infty \approx \frac{x_f}{\lambda} = 0.9 \times 10^{-3} \left( \frac{x_f}{x_{\text{rec}}} \right) \left( \frac{0.03}{\Omega_b h} \right)$$

# 大爆炸核合成 (BBN)

- ▶ 宇宙温度  $T \sim 1\text{MeV}$  时，电子/正电子/光子处于相对论性平衡态，中微子刚脱耦，重子（质子/中子）已处于非相对论性状态，它们的数密度远小于相对论性组分
- ▶ 粒子物理：重子数（质子 + 中子 + 更重的核…）守恒
- ▶ 大爆炸核合成 (Big Bang Nucleosynthesis, BBN)：研究这部分非相对论组分的超越平衡态的演化
- ▶ 一个重要结论——氢-氦数密度比例  $\frac{n_{\text{He}}}{n_{\text{H}}} \sim \frac{1}{16}$

# 大爆炸核合成 (BBN)



人们早就知道氢是宇宙中丰度最高的元素，约占普通物质总密度的  $3/4$ . 在上世纪 50 年代，人们也开始认识到氦 4 约占普通物质总密度的  $1/4$ ，而其他所有元素都只占很小的比例。

大爆炸宇宙学对此给出了自然的解释：按照标准的大爆炸宇宙学理论，只有氢、氦 4 和少量的氘、氦 3 和锂 7 等轻元素可以在宇宙大爆炸中产生，而其他元素都是在在大爆炸之后才产生的。...

——陈学雷. 《现代天体物理 (上)》, 2014, 北京大学出版社, pp. 29.

# 宇宙热历史 (抄自 Baumann 讲义表格 3.1)

事件	时刻 $t$	红移 $z$	温度 $T$
暴胀	$\gtrsim 10^{-34}$ s		
暗物质脱耦	?	?	?
中微子脱耦	1 s	$6 \times 10^9$	1 MeV
电子-正电子湮灭	6 s	$2 \times 10^9$	500 keV
大爆炸核合成	3 min	$4 \times 10^8$	100 keV
物质-辐射相等	60 kyr	3400	0.75 eV
复合	260 ~ 380 kyr	1100-1400	0.26-0.33 eV
光子脱耦	380 kyr	1100	0.26 eV
再电离	100-400 Myr	10-30	2.6-7.0 meV
暗能量-物质相等	9 Gyr	0.4	0.33 meV
当今	13.8 Gyr	0	0.24 meV

# 简化近似

- ▶ 不考虑比氦更重的核素（只算到氦合成……），只考虑质子、中子、氘、氚、氦-3、氦-4
- ▶ 开始阶段 ( $T \gtrsim 0.1 \text{ MeV}$ ) 只有质子、中子（没有更重的核）

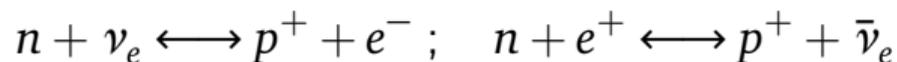
# 开始只有质子/中子的证明

证明思路：

- ▶ 最最开始：真的只有质子、中子，它们通过弱相互作用耦合并处于平衡态
- ▶ 后来，温度降低到了质子中子脱离平衡态，最轻的核素——氘 (D) 开始合成，但是温度仍然高得可以维持氘合成的平衡态
- ▶ 计算平衡态的氘丰度，利用微小的重子-光子比例可以证明直到  $T \gtrsim 0.1 \text{ MeV}$  氘的丰度都很低，更不用说更重的核素了…所以在此之前可以认为只有质子和中子，没有更重的核素

# 开始只有质子/中子的证明【最最开始的弱相互作用平衡态】

- ▶ 宇宙早期（中微子脱耦之前），质子-中子通过弱相互作用（ $\beta$  衰变和逆  $\beta$  衰变）耦合：



- ▶ 忽略电子和中微子的化学势【证明见第一讲最后的选读部分】，平衡态意味着  $\mu_n = \mu_p$ ，中子-质子的平衡态数密度之比：

$$\left(\frac{n_n}{n_p}\right)_{\text{eq}} = \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{m_p - m_n}{T}\right) \approx e^{-\mathcal{Q}/T}$$

其中用到了  $g_p = g_n = 2$ ， $\mathcal{Q} \equiv m_n - m_p = 1.30 \text{ MeV}$  是中子-质子的质量差。

# 开始只有质子/中子的证明【最最开始的弱相互作用平衡态】

第一步考虑质子-中子的密度比例：

- ▶ 忽略电子和中微子的化学势，平衡态意味着  $\mu_n = \mu_p$ ，中子-质子的平衡态数密度之比为  $\left(\frac{n_n}{n_p}\right)_{\text{eq}} \approx e^{-2/T}$
- ▶  $T \gg 1 \text{ MeV}$ :  $\left(\frac{n_n}{n_p}\right)_{\text{eq}} = 1$ , 质子中子一样多
- ▶  $T < 1, \text{ MeV}$ : 中子数少于质子数
- ▶ 如果弱相互作用（上一页的两个反应）的强度足够大、平衡态持续的足够长，那么中子就消耗完了。现实世界的弱相互作用强度只会将中子消耗掉一点儿

# 开始只有质子/中子的证明【之后的氘合成平衡态】

第二步考虑下一个最轻的核素——氘的合成

- ▶ 氘 (D) 合成:  $n + p^+ \longleftrightarrow D + \gamma$
- ▶ 平衡态:  $\mu_n + \mu_p = \mu_D$  ( $\mu_\gamma = 0$ )
- ▶ 仿照前面的套路, 为了消去化学势, 考虑平衡态数密度的比值:

$$\left( \frac{n_D}{n_n n_p} \right)_{\text{eq}} = \frac{3}{4} \left( \frac{m_D}{m_n m_p} \frac{2\pi}{T} \right)^{3/2} e^{-(m_D - m_n - m_p)/T}$$

其中用到了  $g_D = 3, g_p = g_n = 2$

- ▶ 上式的因子  $\frac{m_D}{m_n m_p}$  可忽略 ( $m_D \approx 2m_n \approx 2m_p \approx 1.9 \text{ GeV}$ ), 而 e 指数中氘核与质子 + 中子的质量差——也就是氘的结合能——不能忽略:

$$B_D \equiv m_n + m_p - m_D = 2.22 \text{ MeV}$$

# 开始只有质子/中子的证明【之后的氘合成平衡态】

- ▶ 整理得到平衡态下氘与质子的数密度比：

$$\left(\frac{n_D}{n_p}\right)_{\text{eq}} \approx \frac{3}{4} n_n^{\text{eq}} \left(\frac{4\pi}{m_p T}\right)^{3/2} e^{B_D/T}$$

- ▶ 为了做量级估算，将中子数密度用重子密度近似：  
 $n_n \sim n_b = \eta_b n_\gamma = \eta_b \times \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3$ ，由此可得

$$\left(\frac{n_D}{n_p}\right)_{\text{eq}} \approx \eta_b \left(\frac{T}{m_p}\right)^{3/2} e^{B_D/T}$$

(已经扔掉了不重要的常系数)

# 开始只有质子/中子的证明【平衡态氦丰度低得可怜…】

第二步考虑下一个最轻的核素——氘的合成

- ▶ 为了做量级估算，将中子数密度用重子密度近似：

$$n_n \sim n_b = \eta_b n_\gamma = \eta_b \times \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3, \text{ 由此可得}$$

$$\left(\frac{n_D}{n_p}\right)_{\text{eq}} \approx \eta_b \left(\frac{T}{m_p}\right)^{3/2} e^{B_D/T}$$

- ▶ 微小的重子-光子比例  $\eta_b \sim 10^{-9}$  抑制了氘的合成，直到温度远远低于氘的结合能： $\frac{B_D}{T} \gg 1, e^{B_D/T} \gg 1$  从而抵消  $\eta \sim 10^{-9}$
- ▶ 因此在  $T \gtrsim 0.1 \text{ MeV}$ ，几乎所有重子都是中子或者质子。在这之后，氘和氦才开始合成……

# 大爆炸核合成 (BBN)

- ▶ 从  $T \gtrsim 0.1 \text{ MeV}$ 、只有质子/中子开始，一直算到氦合成
- ▶ 第一步：中子 freeze-out （弱相互作用强度低、质子/中子很快脱耦）
- ▶ 第二步：中子衰变（中子  $\beta$  衰期  $\sim 886 \text{ sec}$ ，必须考虑中子衰变）
- ▶ 第三步：氦合成，得到原初氦丰度、氦-氢比例

# 大爆炸核合成，第一步——中子 freeze-out

- ▶ 初始的中子-质子比例十分重要，因为最终所有中子都合成在氦-4 中
- ▶ 起初 ( $T \gtrsim 1 \text{ MeV}$ )，中子、质子通过弱相互作用处于平衡态，之后要用玻尔兹曼方程追踪中子密度
- ▶ 粗略地估计：定义中子数比例  $X_n \equiv \frac{n_n}{n_n + n_p}$ ，平衡态：
$$X_n^{\text{eq}}(T) = \frac{e^{-2/T}}{1 + e^{-2/T}}$$
- ▶ 中微子在  $T_{\text{dec}} \sim 0.8 \text{ MeV}$  脱耦： $X_n^{\text{eq}}(T = T_{\text{dec}}) = 0.17$
- ▶ 认为中子的 freeze-out 密度就是脱耦时刻的密度： $X_n^\infty \sim X_n^{\text{eq}}(T = T_{\text{dec}}) \sim 1/6$
- ▶ (具体求解玻尔兹曼方程得到的结果为  $X_n^\infty = 0.15$ ，感兴趣的朋友（真的吗？）请参考 Baumann 讲义第 3 章第 3 节)

# 大爆炸核合成，第二步——中子衰变

- ▶  $T < \sim 0.2 \text{ MeV}, t \geq 100 \text{ sec} \dots$
- ▶ 中子  $\beta$  衰期  $\tau_n \approx 886.7 \text{ sec}$ , freeze-out 之后的中子数密度要考虑衰变：

$$X_n(t) = X_n^\infty e^{-t/\tau_n} = \frac{1}{6} e^{-t/\tau_n}$$

# 大爆炸核合成，第三步——氦合成

- ▶ 只考虑两体作用的合成（三体及以上反应需要更高的密度比如恒星内部）
- ▶  $n + p^+ \longleftrightarrow D + \gamma$  (氘合成)
- ▶  $D + p^+ \longleftrightarrow {}^3\text{He} + \gamma$  (氦-3 合成)
- ▶  $D + {}^3\text{He} \longleftrightarrow {}^4\text{He} + p^+$  (氦-4 合成)
- ▶ 因为氘是直接由质子和中子合成的，因此只要中子的量足够，就可以认为氘处于平衡态

# 大爆炸核合成，第三步——氦合成

- ▶ 因为氘的结合能  $B_D = 2.22 \text{ MeV}$  比较小，根据

$$\left(\frac{n_D}{n_p}\right)_{\text{eq}} \approx \eta_b \left(\frac{T}{m_p}\right)^{3/2} e^{B_D/T}$$
，氘丰度在较晚时期 ( $T < 100 \text{ keV}$ ) 才多了起来

- ▶ 尽管更重的核的结合能更大、平衡态丰度更高，但合成它们需要足够的氘……只有等到氘丰度足够大才能进一步核合成，这称为**氘瓶颈**
- ▶ 为估计更重的核开始合成的时期，定义  $T_{\text{nuc}}$  为平衡态氘-质子数密度为 1 的温度，即  $(n_D/n_p)_{\text{eq}} = 1$ ，带入上式得到  
 $T_{\text{nuc}} \sim 0.06 \text{ MeV}$ ,  $t_{\text{nuc}} \sim 330 \text{ sec}$
- ▶ 此时中子衰变到了  $X_n(t_{\text{nuc}}) \sim 1/8$

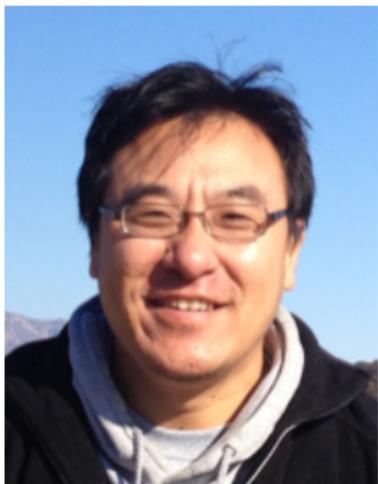
# 大爆炸核合成，第三步——氦合成

- ▶ 氦的结合能比氘大很多，氦合成几乎立刻发生在氘合成之后
- ▶ 合成 1 个  ${}^4\text{He}$  需要 2 个中子，因此氦-4 的丰度等于  $n_{\text{He}} = \frac{1}{2}n_n(t_{\text{nuc}})$ ,

$$\frac{n_{\text{He}}}{n_{\text{H}}} = \frac{n_{\text{He}}}{n_p} \approx \frac{\frac{1}{2}X_n(t_{\text{nuc}})}{1 - X_n(t_{\text{nuc}})} \sim \frac{1}{2}X_n(t_{\text{nuc}}) \sim \boxed{\frac{1}{16}}$$

- ▶ 更常用的形式是质量比：
$$\boxed{\frac{4n_{\text{He}}}{n_{\text{H}}} \sim \frac{1}{4}}$$

# 大爆炸核合成 (BBN)



在大爆炸中，元素产生的过程如下：在早期，重子都以自由质子和中子的形式存在，二者的比例可以用平衡态热力学计算。

但是，随着温度下降，中微子退耦，二者相互转化的反应较慢，比例关系就偏离了热平衡值，中子“冻结” (freeze out) 了，但自由中子仍可逐渐衰变为质子。

更重的核子都是由中子和质子反应结合形成的，…… (部分略) 首先，中子和质子可发生反应形成氘核，再通过氘核与中子和质子的反应形成氦 3 和氦，氦 3 和氦在与氘反应形成氦 4，再进一步的反应可以生成锂等更重的核素。

但是，由于氘核的结合能较小，而此时存在大量的光子，其中的高能光子很容易破坏氘核，因此，在一段时间内氘的丰度增加缓慢，直到温度降为  $0.05 \text{ MeV}$  以下 (时间为大爆炸后几分钟)，氘的丰度才明显增加。

此后，上述反应网络才开始较快地进行，形成其他更重的核。氦 4 的结合能很大，比较稳定，因此丰度较大，而其它元素的丰度相对较小。…… (部分略) 最后，随着密度和温度的降低，核反应停止了。……

——陈学雷. 《现代天体物理 (上)》, 2014, 北京大学出版社, pp. 29.

# BBN 作为超越标准模型 (BSM) 的探针

氢-氦比例的计算用到了……

- ▶  $g_*$ : 总的相对论性自由度数目
- ▶  $\tau_n$ : 中子  $\beta$  衰期
- ▶  $\mathcal{Q}$ : 质子-中子质量差
- ▶  $\eta_b$ : 重子-光子比例
- ▶  $G_F$ : 弱相互作用强度

对粒子物理标准模型的偏离会对 BBN 的观测产生影响……



# BBN 作为超越标准模型 (BSM) 的探针



Beyond Standard Model



BiSMarck

# 覆盖内容……

- ▶ Baumann 讲义第三章 Thermal History —— 3.3 节 Beyond Equilibrium  
【必读】
- ▶ 教材第三章 Beyond Equilibrium

# 作业

- ▶ 没有……（掌握推导）

